$$f_{[r+1]}(c) = \frac{2}{1-\alpha_c}\,\frac{1}{c^3}\left[-\underbrace{\int_0^c dc_1\, c_1^2 f_r(c_1)}_{\overset{x=1/c\,c_1}{=}\; c^3\int_0^1 dx\, x^2 f(cx)} + \frac{2\pi}{3}\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_r}\int_0^c dc_1\int_0^\infty dc_2\, f(c_1)f(c_2)\,\underbrace{c_1c_2\left[(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3\right]}_{}\right]$$

$$= \begin{cases} c_1>c_2 : & c_1c_2\cdot\{3c_1^2c_2+c_2^3\}\cdot 2 \\ c_1<c_2 : & c_1c_2\cdot\{3c_2^2c_1+c_1^3\}\cdot 2 \end{cases}$$

La 2e intégrale se réduit à :

$$\int_0^\infty dc_2\, f(c_1)f(c_2)\, c_1c_2\{(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3\} = \overbrace{2\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_1)f(c_2)\, c_1c_2\,(3c_1^2c_2+c_2^3)}^{c_2<c_1} + \underbrace{\overbrace{2\int_{c_1}^\infty dc_2\, f(c_1)f(c_2)\, c_1c_2\,(3c_2^2c_1+c_1^3)}^{c_2>c_1}}_{=2\int_0^\infty dc_2 f(c_1)f(c_2)\,c_1c_2(3c_2^2c_1+c_1^3)\;-\;2\int_0^{c_1} dc_2 f(c_1)f(c_2)\,c_1c_2(3c_2^2c_1+c_1^3)}$$

$$= 2\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_1)f(c_2)\, c_1c_2\Big[\underbrace{3c_1^2c_2+c_2^3}_{c_2(3c_1^2+c_2^2)} - \underbrace{3c_2^2c_1+c_1^3}_{c_1(3c_2^2+c_1^2)}\Big] + 2\int_0^\infty dc_2\, f(c_1)f(c_2)\, c_1^2c_2\,(3c_2^2+c_1^2)$$

$$= 2\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_1)f(c_2)\Big(c_1c_2^2(3c_1^2+c_2^2) - c_1^2c_2(3c_2^2+c_1^2)\Big) + 2c_1^2\int_0^\infty dc_2\, f(c_1)f(c_2)\; c_2\,(3c_2^2+c_1^2)$$

$$= 2c_1f(c_1)\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\; c_2^2(3c_1^2+c_2^2) - 2c_1^2 f(c_1)\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2(3c_2^2+c_1^2) + \underbrace{2c_1^2 f(c_1)\int_0^\infty dc_2\, f(c_2)\, c_2(3c_2^2+c_1^2)}_{=6c_1^2 f(c_1)\,M_3 + 2c_1^4 f(c_1)\,M_1}$$

$$= 6c_1^3 f(c_1)\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)c_2^2 + 2c_1 f(c_1)\int_0^{c_1} f(c_2)\,c_2^4 - 6c_1^2 f(c_1)\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2^3 - 2c_1^4\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2 + 6c_1^2 f(c_1)\, M_3 + 2c_1^4 f(c_1)\, M_1$$

$$\Rightarrow \int_0^c dc_1\int_0^\infty dc_2\, f(c_1)f(c_2)\, c_1c_2\{(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3\} = 6\int_0^c dc_1\, c_1^3 f(c_1)\int_0^{c_1} dc_2 f(c_2)\, c_2^2 + 2\int_0^c dc_1\, f(c_1)\, c_1\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2^4 - 6\int_0^c dc_1\, c_1^2 f(c_1)\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2^3$$
$$-2\int_0^c dc_1\, f(c_1)\, c_1^4\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2 + 6M_3\int_0^c dc_1\, f(c_1)\, c_1^2 + 2M_1\int_0^c dc_1\, f(c_1)\, c_1^4$$

Changement de variables : $X = 1/c\; c_1 \Rightarrow c_1 = cX$

$$= 6\int_0^1 dX\, X^3 c^4 f(cX)\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)c_2^2 + 2\int_0^1 dX\, X c^2 f(c\cdot X)\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)\, c_2^4 - 6\int_0^1 dX\; c^3 f(cX)\, X^2\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)\, c_2^3$$
$$-2\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^4 c^5\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2 + 6M_3\int_0^1 dX\, f(c\cdot X)\, c^3X^2 + 2M_1\int_0^1 dX\; f(cX)\; c^5 X^4$$

$$= 6c^4\int_0^1 dX\, X^3 f(cX)\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)\, c_2^2 + 2c^2\int_0^1 dX\, X f(cX)\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)\, c_2^4 - 6c^3\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^2\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)\, c_2^3$$
$$-2c^5\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^4\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2 + 6c^3 M_3\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^2 + 2c^5 M_1\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^4$$

$$\Rightarrow$$
$$f(c) = \frac{2}{1-\alpha_c}\Bigg[-\int_0^1 dX\, X^2 f(cX) + \frac{2\pi}{3}\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\Big\{2\,\frac{1}{c}\int_0^1 dX\, X f(cX)\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)\, c_2^4 - 6\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^2\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)\, c_2^3 + 6c\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^3\int_0^{cX} dc_2\, f(c_2)\, c_2^2$$
$$-2c^2\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^4\int_0^{c_1} dc_2\, f(c_2)\, c_2 + 6M_3\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^2 + 2c^2 M_1\int_0^1 dX\, f(cX)\, X^4\Big\}\Bigg]$$

Les termes pour lesquels les moments M ne sont pas factorisés ne posent pas de problème car c'est le cas où $c_1 > c_2$, et dans ces cas le support des fonctions reste < 1 pour les intégrations. Soit $x_2 = 1/c\, c_2$, alors :

$$\frac{1}{c}\int_0^1 dx\, x\, f(cx) \int_0^{cx} dc_2\, f(c_2)\, c_2^4 = \frac{1}{c}\int_0^1 dx\, x\, f(cx) \int_0^{x} dx_2\, c\, f(cx_2)\, c^4 x_2^4 = c^4 \int_0^1 dx\, x\, f(cx) \int_0^{x} dc_2\, f(cx_2)\, x_2^4$$

$\Longrightarrow$

$$f(c) = \frac{2}{1-\alpha_i}\Big[-\int_0^1 dx\, x^2 f(cx) + \frac{2\pi}{3}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\Big\{ 2c^4 \int_0^1 dx\, x\, f(cx) \int_0^x dy\, f(cy)\, y^4 - 6c^4 \int_0^1 dx\, f(cx)\, x^2 \int_0^x dy\, f(cy)\, y^3 + 6c^4 \int_0^1 dx\, f(cx)\, x^3 \int_0^x dy\, f(cy)\, y^2$$
$$- 2c^4 \int_0^1 dx\, f(cx)\, x^4 \int_0^x dy\, f(cy)\, y + 6M_3 \int_0^1 dx\, f(cx)\, x^2 + 2c^2 M_1 \int_0^1 dx\, f(cx)\, x^4 \Big\}\Big]$$

Dans la limite $c \to 0$ on a :

$$\frac{2}{1-\alpha_i}\left[-\frac{1\,f(0)}{3} + \frac{2\pi}{3}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle} 6 M_3 \int_0^1 dx\, f(cx)\, x^2 \right] = \frac{2}{3(1-\alpha_i)}\left[-1^{f(0)} + \frac{2\pi}{\langle c_{12}\rangle} M_3 \cdot 6 \cdot \underbrace{\int_0^1 dx\, x^2}_{=1/3} f(0) \right] = \frac{2}{3(1-\alpha_i)}\left[-1 + \frac{2\pi}{\langle c_{12}\rangle} M_3\, 2 \right] f(0)$$

$$= \frac{2}{3(1-\alpha_i)}\left[-1 + \frac{4\pi}{\langle c_{12}\rangle} M_3 \right] f(0) \quad \# \text{ oui !}$$

$$\boxed{f(c) = \frac{2}{1-\alpha_i}\Big[-\int_0^1 dx\, x^2 f(cx) + \frac{2\pi}{3}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\Big\{ c^4 \Big(2\int_0^1 dx\, x\, f(cx) \int_0^x dy\, f(cy)\, y^4 - 6\int_0^1 dx\, f(cx)\, x^2 \int_0^x dy\, f(cy)\, y^3 + 6\int_0^1 dx\, f(cx)\, x^3 \int_0^x dy\, f(cy)\, y^2 - 2\int_0^1 dx\, f(cx)\, x^4 \int_0^x dy\, f(cy)\, y \Big) + 6M_3 \int_0^1 dx\, f(cx)\, x^2 + 2c^2 M_1 \int_0^1 dx\, f(cx)\, x^4 \Big\}\Big]}$$

Pour les intégrations de $\int_0^x$ ça ne pose pas de pb. avec la méthode des trapèzes (ou de Simpson) car il suffit de calculer les x aux points du tableau.

Optimisation code :

- $h**2 \to h2$
- intégration $\int_0^1 dx\, f(cx) \underbrace{\int_0^x dy\, f(cx)}_{= G(x)}$: calcul de $G(x+1) = \underbrace{G(x)}_{\text{déjà calculé avant.}} + G(1)$.

Résumé de la résolution de Boltzmann éq. intégrale

Contexte :

- annihilation ballistique 3d pour C.I. arbitraire
- syst. homogène spatiallement
- description : équation de Boltzmann devient "exacte" dans le régime des temps longs pour l'annihilation (densité faible)
- ansatz de scaling : cherche une solution du type :

$$f(\vec{v},t) = \frac{n(t)}{\langle v\rangle(t)}\,\tilde{f}\left(\frac{\vec{v}}{\langle v\rangle(t)}\right) \quad ; \quad \langle v\rangle(t) = \sqrt{\langle v^2\rangle} \quad ; \quad c = \frac{\vec{v}}{\langle v\rangle(t)}$$

$\Longrightarrow$ éq. Boltzmann :

$$\begin{cases} \left(1 + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left(3 + c_1\frac{d}{dc_1}\right)\right) f(c_1) = f(c_1)\int_{\mathbb{R}^d} dc_1\,|c_{12}|\,f(c_2)\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle} & ;\ c_{12} = c_1 - c_2 \qquad (*) \\ \alpha = \dfrac{\langle c_{12}\,c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle} \end{cases}$$

Pourquoi s'intéresser à cette solution ?

- sol. num. jamais trouvée
- littérature : développ. Sonine pour $f = \mathcal{M}\,(1 + a_2 S_2)$
- nous : - réalisé des calculs Sonine + Monte-Carlo gaz inélastique
  - besoin de confirmations
  - si annihil. marche, espère faire la m. chose pour le gaz inélastique.

Implémentation numérique

1) Dérivation des équations

$\times c_1^2$ puis $\int_c^\infty dc_1 \Longrightarrow$ LHS $(*)$ = int. dérivée : $\int_c^\infty dc_1 \frac{d}{dc_1}(c_1^3 f(c_1))$

$\Longrightarrow$ éq. intégrale

$$f_{i+1}(c) = \frac{2}{1-\alpha_i}\,\frac{1}{c^3}\left[\underbrace{\int_c^\infty dc_1\, c_1^2 f_i(c_1)}_{a} - \frac{2\pi}{3}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_i}\underbrace{\int_c^\infty dc_1\int_0^\infty dc_2\, f_i(c_1)\,f_i(c_2)\,c_1c_2\left\{(c_1+c_2)^3 - |c_1-c_2|^3\right\}}_{b}\right]$$

Si $c \to 0 \Rightarrow$ ↯ num

$\Rightarrow 2^e$ équation pour $c \sim 0$: chgt. variables a) $x = \frac{1}{c}c_1$ b) $\begin{cases} x_1 = 1/c\; c_1 \\ x_2 = 1/c\; c_2 \end{cases}$

$$f_{i+1}(c) = \frac{2}{1-\alpha_i}\left[-\int_0^1 dx\, f_i(cx)\,x^2 + \frac{2\pi}{3}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_i}c^2\int_0^1 dx_1\int_0^\infty dx_2\, f_i(cx_1)\,f_i(cx_2)\,c_1c_2\left\{(c_1+c_2)^3 - |c_1-c_2|^3\right\}\right]$$

2) Schéma de résolution : itératif $i \to i+1$

3) Schéma numérique : implémentation :

a) intégration : trapèze ($O(h^2)$) ou Simpson ($O(h^4)$) (ne change pas le résultat)

b) C.I. très proche de la sol. supposée exacte pour $c \sim 0$ (gaussienne proprement normalisée)

b2) Points résolution : découpe $[0,\infty[$ ($\infty \sim 30$) en intervales équidistants ; tjs. m. points (schéma itératif)

c) Recollement : $c \in [0;1]$: éq. petits c ; $c \in [1-\varepsilon;\infty[$: éq. grands c } bande de recollement ε

d) Mixing λ : $f_{i+1} := (1-\lambda)\,f_i + \lambda f_{i+1}$, λ petit

e) Normalisation : $\int_0^\infty dc\; c^2 f_i(c) = \frac{1}{4\pi}$ chaque itération

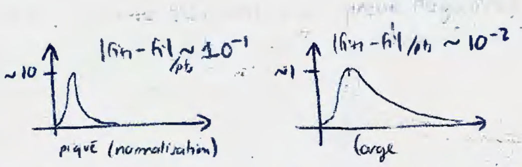
f) Normalisation 2 : $f(c)$ sol. alors $\lambda^3 f(\lambda c)$ aussi sol.

$\Longrightarrow$ fixe le second moment de $f(c)$ à 1 : $f_\lambda(c) = \lambda^3 f(\lambda c)$ t.q.

$$\int d^3c\; f_\lambda(c)\,c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sqrt{4\pi\int_0^\infty dy\, y^4 f(y)}$$: transformation

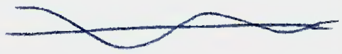
4) État actuel :

- ne converge pas : oscille



} c.f. gfx Annexe.

- queue : 2^e moment négatif $\Longrightarrow$ queue négative : oscillations d'amplitude $\to 0$:



$\Longrightarrow$ "Fluctuations" significatives dans la queue

⇝ devrait converger vers qqch proche gaussienne (C.I.)

5) Vérifications :

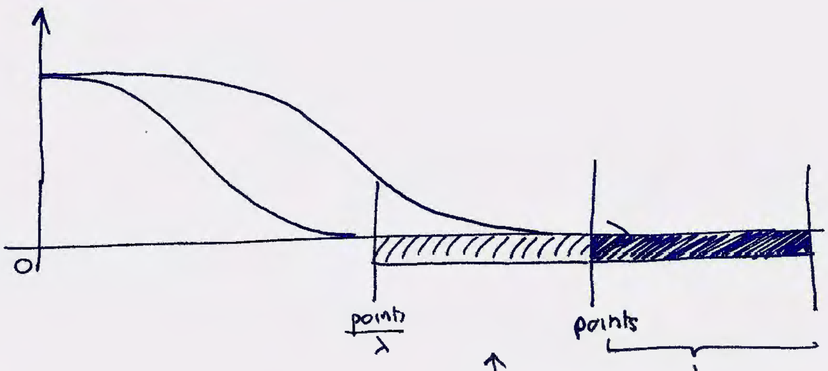
- routines d'intégration (les 2 vérifiées)
- méthode de traitement du problème et de recollement par l'éq. int. lin. $\begin{cases} f(x) = 1 - x\int_0^1 dy\, f(xy) \\ f(x) = 1 - \int_0^x dy\, f(y) \end{cases}$ $\Rightarrow f(x) = e^{-x}$

- C.I. $f_0(c) = \delta(c-1)$: 1 itération à la main : ok.
- C.I. Gaussienne : 1 itération : $f_1(0)$ correct.
- routine d'étirement vers la droite $\lambda \leq 1$

  → "presque" validée : m. résultat qu'un code intuitif moins sophistiqué.

• (PAS vérifié) : routine de compression vers la gauche $\lambda > 1$:

à améliorer : reproduction de la queue



OUI, mais ne doit pas jouer un rôle crucial pour la convergence actuelle du programme car $\lambda < 1$ en général, et λ ne dépasse pas $\lambda \sim 1.5$ en général.

• $\lambda = 0.0001$ -- $10^{-3}, 10^{-4}$: carant !

~~α : vérifier~~

• 1è équation et faire int. lin. / arbitr 2è éq. faire jusqu'à $\frac{x_2}{\infty}$ $\int dx_1$ et $\int dx_2$ m. domaine d'intégration.

• $(c_1+c_2)^3 - |c_1-c_2|^3 \longrightarrow$ développer par termes de façon explicite : symétries

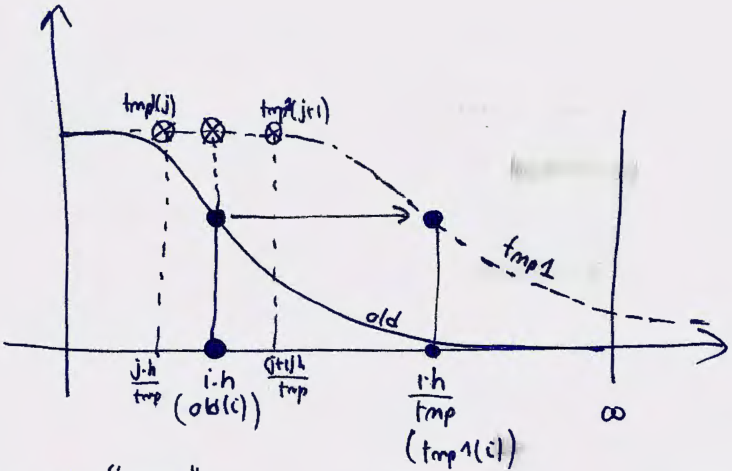
• séparer les contributions en $f(0)$ à la main, et les traiter à part.

Réécriture :

$$c_1 c_2 \left((c_1+c_2)^3 - |c_1-c_2|^3 \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{c_1} dc_2\, f_{c_2<c_1} + \int_0^{\infty} dc_1\, f_{c_2>c_1} - f_{c_2<c_1}$$

Nouvel Algorithme d'étirement vers la droite



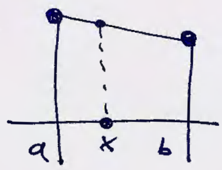
trouver les valeur de "tmp1" en i.h et l'attribuer au nouveau tableau cherché.

$\Longrightarrow$ chercher j t.q. $\quad i.h \in \left[\frac{j.h}{tmp} , \frac{(j+1)h}{tmp} \right] \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} j \leq tmp \cdot i \\ j+1 \geq tmp \cdot i \end{cases}$

$\Longrightarrow$ trouve j et donc il suffit d'interpoler avec $\begin{cases} a = \frac{j.h}{tmp} \; ; \; b = \frac{(j+1)h}{tmp} \\ x = i.h \end{cases}$; $f(a) = tmp1(j)$, $f(b) = tmp1(j+1)$

et attribuer la valeur de l'interpolation à old(i)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) = old(x) \; ; \quad x \in [a, b]$$



Ex : $tmp = 0.3$, $i = 10$ $\begin{cases} 0.3\, i \geq j \\ 0.3\, i \leq j+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \geq j \\ 3 \leq j+1 \end{cases} \Rightarrow \underline{j = 3}$.

Ancien algo. : $\left[\begin{array}{l} tmp1 = \quad Y(nint(i\, tmp)) \; , \; i = 0, points \\ \text{puis lissage les escaliers} \end{array} \right.$

Mais bon car $\exists$ trop d'approx. avec nint.

Intégrales : petit c : mieux que nint : interpolation linéaire :

- $\int_0^1 dx\, f(cx) x^2$: $\quad c.x = i.j.h^2$, $c = ih$; $x = jh$; donc dans le tableau f1 le point cherché est entre les deux points du tableau : $int(ijh)$ et $int(ijh+1)$ $\Longrightarrow$ interpolation linéaire : $\begin{array}{l} a = int(ijh^2) \\ b = int(ijh^2) + 1 \end{array}$ $\begin{array}{l} ; f(a) = f1(int(ijh)) \\ ; f(b) = f1(int(ijh)+1) \end{array}$

  $tmp1(0) = f1(0)$

  $tmp1(1:one) = \left(/ \left(\frac{f(b) - f(a)}{\underbrace{b-a}_{=1}} (ijh^2 - a) + f(a) \; , \; i = 1, one \right) / \right)$

- $\int_0^1 dx_1 \int_0^\infty dx_2\, f(cx_1) f(cx_2)\, x_1 x_2 \left((x_1+x_2)^3 - |x_1 - x_2|^3 \right)$

  $\left. \begin{array}{l} c = ih \\ x_1 = jh \\ x_2 = kh \end{array} \right\}$ idem : pts du tableau : $\begin{cases} cx_1 \text{ entre } & int(ijh) \text{ et } int(ijh)+1 \\ cx_2 \text{ entre } & int(ikh) \text{ et } int(ikh)+1 \end{cases}$

Equation de Boltzmann : formulation numérique (40) PRE

$$\left[1+\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\left(d+c_1\frac{d}{dc_1}\right)\right]f(c_1)=f(c_1)\int_{\mathbb{R}^d}dc_2\,|c_{12}|\,f(c_2)\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\qquad ;\ d=3\qquad (\text{$d=2$: facile, peut ensuite être fait})$$

$\times c_1^2$ puis $\int_c^\infty dc_1 \Rightarrow$

$$\int_c^\infty dc_1\,c_1^2 f(c_1)+\frac{1-\alpha}{2}\underbrace{\int_c^\infty dc_1\underbrace{\left[3c_1^2+c_1^3\frac{d}{dc_1}\right]f(c_1)}_{=\frac{d}{dc_1}\left(c_1^3 f(c_1)\right)}}_{\substack{=\frac{d}{dc_1}\int_c^\infty dc_1\,c_1^3 f(c_1)\\ =-c^3 f(c)}}=\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\underbrace{\int_c^\infty dc_1\int_{\mathbb{R}^3}dc_2\,c_1^2 f(c_1)f(c_2)\,|c_{12}|}_{=\int_c^\infty dc_1\int_0^\infty dc_2\,c_2^2\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,c_1^2 f(c_1)f(c_2)\,|c_{12}|}$$

$$\vec{c}_1\cdot\vec{c}_2=|c_1|\cdot|c_2|\cdot\cos\theta\quad ;\ |c_{12}|=\sqrt{c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos\theta}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1-\alpha}{2}c^3 f(c)=\int_c^\infty dc_1\,c_1^2 f(c_1)-\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\int_c^\infty dc_1\,c_1^2c_2^2 f(c_1)f(c_2)\underbrace{\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi}\underbrace{\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\sqrt{c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos\theta}}_{x=\cos\theta\ ;\ dx=-\sin\theta\,d\theta}}$$

$$=-2\pi\int_{+1}^{-1}dx\sqrt{c_1^2+c_2^2-2c_1c_2x}$$

$$=2\pi\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2c_1c_2}\left[c_1^2+c_2^2-2c_1c_2x\right]^{3/2}\Big|_{+1}^{-1}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\,\frac{(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3}{c_1\cdot c_2}$$

$$=\int_c^\infty dc_1\,c_1^2 f(c_1)-\frac{2\pi}{3}\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle}\int_c^\infty dc_1\int_0^\infty dc_2\,f(c_1)f(c_2)\,c_1c_2\left\{(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3\right\}$$

Avec :

$$M_{10}:=\langle c_{12}\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}dc_1\int_{\mathbb{R}^3}dc_2\,f(c_1)f(c_2)\underbrace{|c_{12}|}_{=\sqrt{c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos\theta}}$$

$$=4\pi\int_0^\infty dc_1\int_0^\infty dc_2\,f(c_1)f(c_2)\underbrace{\int_0^\pi d\theta\sqrt{c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos\theta}\,\sin\theta}_{=\frac{1}{3}\left(\frac{(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3}{c_1c_2}\right)}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi}\,c_1^2c_2^2$$

$$=\frac{8\pi^2}{3}\int_0^\infty dc_1\int_0^\infty dc_2\,f(c_1)f(c_2)\,c_1\cdot c_2\left\{(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3\right\}$$

$$M_{12}:=\langle c_{12}c_1^2\rangle=\frac{8\pi^2}{3}\int_0^\infty dc_1\int_0^\infty dc_2\,f(c_1)f(c_2)\,c_1^3c_2\left\{(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3\right\}$$

$$M_{02}:=\langle c_1^2\rangle=\int_0^\infty dc_1\,c_1^2\underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi}\int_0^\infty dc_2\,c_2^2\underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi}\,c_1^2 f(c_1)f(c_2)$$

$$=(4\pi)^2\int_0^\infty dc_1\,c_1^4 f(c_1)\int_0^\infty dc_2\,c_2^2 f(c_2)$$

$$\alpha=\frac{\langle c_{12}c_1^2\rangle}{\langle c_{12}\rangle\langle c_1^2\rangle}$$

Conclusion : [formulation pour grands c]

$$\boxed{\begin{gathered}f_{i+1}(c)=\frac{2}{1-\alpha_i}\,\frac{1}{c^3}\left[\int_c^\infty dc_1\,c_1^2 f_i(c_1)-\frac{2\pi}{3}\,\frac{1}{\langle c_{12}\rangle_i}\int_c^\infty dc_1\int_0^\infty dc_2\,f_i(c_1)f_i(c_2)\,c_1c_2\left\{(c_1+c_2)^3-|c_1-c_2|^3\right\}\right]\\ \lim_{i\to\infty}f_i(c)=f^*(c)\end{gathered}}$$

N.B. : normalisation explicite :

a)
$$\int_c^\infty dc_1\,c_1^2 f(c_1)=-\int_0^c dc_1\,c_1^2 f(c_1)+\underbrace{\int_0^\infty dc_1\,c_1^2 f(c_1)}_{=\frac{1}{4\pi}}$$

b)
$$\int_c^\infty dc_1\int_{\mathbb{R}^3}dc_2\,c_1^2 f(c_1)f(c_2)\,|c_{12}|=\int_c^\infty dc_1\,c_1^2\int d\Omega\int_{\mathbb{R}^3}dc_2\,f(c_1)f(c_2)\,|c_{12}|\,\frac{1}{4\pi}$$

$$=-\int_0^c dc_1\,c_1^2\int d\Omega\int_{\mathbb{R}^3}dc_2\,f(c_1)f(c_2)\,|c_{12}|\,\frac{1}{4\pi}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}dc_1\int_{\mathbb{R}^3}dc_2\,f(c_1)f(c_2)\,|c_{12}|\,\frac{1}{4\pi}}_{=\langle c_{12}\rangle}$$

Formulation pour petits c :

Normalisation explicite $\Rightarrow$

$$f(c) = \frac{2}{1-\alpha}\frac{1}{c^3}\Big[\underbrace{-\int_0^c dc_1\, c_1^2 f(c_1)}_{a} + \frac{2\pi}{3}\frac{1}{\langle c_{12}\rangle} \underbrace{\int_0^c dc_1 \int_0^\infty dc_2\, f(c_1) f(c_2)\, c_1 c_2 \left\{ (c_1+c_2)^3 - |c_1-c_2|^3 \right\}}_{b} \Big]$$

Chgt. variables :

a) $x = \frac{1}{c}c_1$; $dx = \frac{1}{c}dc_1$: $\int_0^c dc_1\, c_1^2 f(c_1) = \int_0^1 c\,dx\, c^2 x^2 f(cx) = c^3 \int_0^1 dx\, x^2 f(cx)$

b) $\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{c}c_1 \\ x_2 = \frac{1}{c}c_2 \end{array}\right\}$ $\quad J = \det\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c\end{pmatrix} = c^2$; $dc_1 dc_2 = J\,dx_1 dx_2 = c^2 dx_1 dx_2$

$$\Rightarrow \int_0^c dc_1 \int_0^\infty dc_2\, f(c_1) f(c_2)\, c_1 c_2 \left\{ (c_1+c_2)^3 - |c_1-c_2|^3 \right\} = \int_0^1 dx_1 \int_0^\infty dx_2\, f(cx_1) f(cx_2)\, cx_1\, cx_2 \left\{ (cx_1+cx_2)^3 - |cx_1 - cx_2|^3 \right\}$$

$$= c^5 \int_0^1 dx_1 \int_0^\infty dx_2\, f(cx_1) f(cx_2)\, x_1 x_2 \left\{ (x_1+x_2)^3 - |x_1-x_2|^3 \right\}$$

Conclusion : [formulation pour petits c]

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{i+1}(c) = \dfrac{2}{1-\alpha_i}\Big[-\int_0^1 dx\, f_i(cx)\, x^2 + \dfrac{2\pi}{3}\dfrac{1}{\langle c_{12}\rangle_i} c^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^\infty dx_2\, f_i(cx_1) f_i(cx_2)\, x_1 x_2 \left\{ (x_1+x_1)^3 - |x_1-x_1|^3 \right\} \Big] \\ \lim_{i\to\infty} f_i(c) = f^*(c) \end{array}}$$

⚠ Recollement des solutions

Normalisation des solutions à chaque itération :

1) $\int d^3x\, f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(c) := \dfrac{f(c)}{4\pi \int_0^\infty dc\, c^2 f(c)}$

2) $\exists$ une solution $f^* \Rightarrow \exists\, \infty$ solutions $f_\lambda^*(c) = \lambda^3 f^*(\lambda c)$. Choix d'une solution telle que $\int d^3x\, f_\lambda^*(x)\, x^2 = 1$.

$$\frac{1}{4\pi} = \int_0^\infty dc\; c^4 \lambda^3 f^*(\lambda c) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty dy\, y^4 f^*(y) \Rightarrow \lambda = \sqrt{4\pi \int_0^\infty dy\, y^4 f^*(y)}$$

$$\Rightarrow f(c) := \lambda^3 f(\lambda c)$$